المحاضرة الثانية عشر

أمثلة عن المنحني الأملس:

1. أي دائرة ممسوحة مرة واحدة "سواء كانت بالاتجاه الموجب أو بالاتجاه السالب" هي منحنٍ أملس.

الإثبات: إنّ $\gamma(t) = a + re^{it} : 0 \le t \le 2\pi$ ممثل وسيطي للدائرة $C^+(a,r)$.

1) γ قابل للاشتقاق على $[0,2\pi]$، كما أنّ $\gamma'(t) = ire^{it}$ مستمر على المجال $[0,2\pi]$.
2) $\gamma'(t) = ire^{it} \neq 0$ وذلك أياً كانت t من المجال $[0,2\pi]$. لأنّ: $|\gamma'(t)| = r > 0$.
3) γ متباين على المجال $[0,2\pi[$ وذلك لأنّ:

$$e^{it_1} = e^{it_2} \quad : t_1, t_2 \in [0,2\pi[$$
$$\Leftrightarrow t_1 = t_2 + 2\pi k : t_1, t_2 \in [0,2\pi[$$
$$\Leftrightarrow t_1 = t_2$$

وذلك لأنّ $t_1, t_2 \in [0,2\pi[$.

كما أنّ $\gamma'(0) = \gamma'(2\pi)$ وذلك لأنّ

$$\gamma'(0) = ire^{i0} = ir$$
$$\gamma'(2\pi) = ire^{i(2\pi)} = ir$$

بالنتيجة إنّ $C^+(a,r)$ منحنٍ أملس، لأنّه حقق الشروط الثلاثة. بنفس الأسلوب نستطيع إثبات أنّ المنحنٍ $C^-(a,r)$ أملس.

2. الدائرة الممسوحة أكثر من مرة هو منحنٍ غير أملس.

الإثبات:

وذلك لأنّ الشرط الثالث غير محقّق، وذلك لأنّه عندما يمر المنحني من نقطة أكثر من مرة ستكون غير بسيطة، وأي ممثل له لن يكون متباينا. وبالتالي فهو منحن غير أملس.

3. أي قطعة مستقيمة موجهة هي منحنٍ أملس.

الإثبات:

لنفرض أنّ z_1, z_2 بداية ونهاية القطعة المستقيمة على الترتيب، عندئذٍ فإنّ التمثيل الوسيطي لهذه القطعة:

$$\gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2$$

بقي التحقق من الشروط الثلاثة. "تترك للطالب"

<u>يجب أن تعلم ما يلي:</u>

إنّ تباين أحد الجزأين (الحقيقي أو التخيلي) لتابعٍ عقدي بمتحول حقيقي يقتضي تباين التابع العقدي على ذلك المجال. لكنّ العكس غير صحيح بالضرورة، والمثال على ذلك:

التابع $\gamma(t) = \cos(t) + isin\ (t)$ هو تابع متباين على المجال $[0,2\pi[$، بينما كل من $sin\ t$ ، $\cos t$ غير متباين على ذلك المجال.

4. المنحني الممثل بالتابع $\gamma(t) = t + it^2$ على أي مجال مغلق $[a,b]$، هو منحنٍ أملس.

إن هذا المنحني هو قوس من قطع مكافئ لأنّه لو حذفنا الوسيط $x = t, y = t^2$ لوجدنا $y = x^2$. التحقق من الشروط الثلاثة. "يترك للطالب"

5. أي مثلث أو مربع أو مستطيل هو منحنٍ غير أملس.
بسبب اختلال الشرط الأول، وذلك لعدم قابلية الاشتقاق أي ممثل γ لهذه المنحنيات عند الرؤوس، أي عدم وجود γ' عند كل رأس.

المنحني الأملس قطعياً:

نقول عن منحن Γ إنّه أملس قطعياً إذا كان Γ مجموعاً منتهياً لعدد من المنحنيات الملساء المتتالية، أي إذا كان

$$\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \ldots \oplus \Gamma_n$$

حيث $\Gamma_i\ : i = 1, \ldots, n$.

كل منحنٍ أملس هو أملس قطعياً "مكوّن من قطعة واحدة ملساء"، ولكنّ العكس غير صحيح بالضرورة.

أمثلة معاكسة:

المثلث هو أملس قطعيّاً وهو غير أملس.

الدائرة الممسوحة مرتين منحن غير أملس كما رأينا سابقا، ولكنها منحن أملس قطعياً لأنها مجموع لمنحنيين أملسين هما: الدائرة الممسوحة أول دورة هي منحنٍ أملس، وكذلك الدائرة الممسوحة في ثاني دورة منحن أملس.

تعريف: نقول عن تابعٍ عقدي:

$$\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

إنّه مقيس "قابل للقياس" أو إنّه طريق إذا كان γ ذا تغير محدود. وهذا يكافئ أنّ كل من الجزأين الحقيقي والتخيلي تابع ذو تغير محدود. نُسمّي التغير الكلي للتابع في هذه الحالة بطول γ، ونرمز له بـ $L(\gamma)$.

نقول عن المنحني Γ إنّه طريق إذا كان نقطة أو كان أحد تمثيلاته الوسيطية γ طريقاً، ونعرّف طول هذا المنحني بالمساواة: $L(\Gamma) = L(\gamma)$.

تمارين: عيّن المنحنيات الممثلة بـ :

1) $\gamma_1(t) = t + it\ : 0 \leq t \leq 1$

الحل: لنحذف الوسيط بين المعادلتين: $x = t\,, y = t$ فنجد أنّ $x = y$ ، أي أنّ حامل المنحني هو منصف الربع الأول، وهي قطعة مستقيمة ممسوحة مرة واحدة من 0 إلى $1 + i$.

$$2)\ \gamma_2(t) = (1 - 2t) + i(1 - 2t): 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

الحل: نلاحظ أنّ الجزء الحقيقي يساوي الجزء التخيلي، فهو يمثل منحنٍ حامله منصف الربع الأول والثالث، أي أنّه قطعة مستقيمة ممسوحة مرة واحدة من $1 + i$ إلى 0.

$$3)\ \gamma_3(t) = \tan(t) + i\tan(t): 0 < t \leq \frac{\pi}{4}$$

الحل: نلاحظ أنّ الجزء الحقيقي يساوي الجزء التخيلي، وبالتالي فإنّ المنحني هو قطعة مستقيمة ممسوحة مرة واحدة من 0 إلى $1 + i$.

مبرهنة: ليكن Γ منحنياً أملس، وليكن $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ تمثيلاً لـ Γ " الذي يحقق شروط المنحني الأملس" عندئذٍ يكون Γ أملس قطعياً ويتحقّق:

$$L(\Gamma) = L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt$$

ملاحظة: Γ أملس قطعياً $\Longleftarrow \Gamma$ طريق. "العكس غير صحيح بالضرورة".

وإذا كان $\Gamma_n \oplus ... \oplus \Gamma_2 \oplus \Gamma_1 = \Gamma$ فإنّ $L(\Gamma) = L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2) + \cdots + L(\Gamma_n)$.

تكامل التابع العقدي على منحنٍ عقدي:

ليكن f تابعاً عقدياً معرّفاً على مجموعةٍ مفتوحة $A \subset \mathbb{C}$، و Γ طريقاً في A، بحيث يكون f محدودا على Γ، أي أنّ $\exists M \geq 0 :\ |f(z)| \leq M\ : \forall z \in \Gamma$

وليكن $\gamma\ :\ [a,b] \to \mathbb{C}$ تمثيلاً وسيطياً لـ Γ، عندئذٍ فإنّ f كمول " قابل للمكاملة" على Γ إذا كان $f \circ \gamma$ كمولا بالنسبة لـ γ. وعندما يكون كمولا على Γ فإن:

$$\int_\Gamma f = \int_\gamma f = \int_\gamma f \circ \gamma$$

حالة خاصة:

إذا كان f مستمراً على A، وكان Γمنحنياً أملس في A، عندئذٍ فإنّ f كمول على Γ، وإنّ:

$$\int_\Gamma f = \int_a^b \mathrm{f}(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt$$

يمكن التعميم لأجل Γ أملس قطعياً، و f مستمر قطعياً على $[a,b]$، وهذا يكافئ أنّ الجزأين الحقيقي والتخيلي لـ $f \circ \gamma$ مستمران قطعيا على $[a,b]$.

تمرين:

هل التابع $f(z)=\frac{1}{z}$ كمول على دائرة الواحدة، إذا كان كذلك احسب تكامله على هذه الدائرة.

الحل:

"بما أنّه لم يحدد عدد مرات المسح أو اتجاه الدوران فاصطلاحا نعتبر الدائرة ممسوحة مرة واحدة بالاتجاه الموجب".

إنّ f مستمر على $\mathbb{C}^*$، كما أنّ $C^+(0,1)$ منحنٍ أملس في $\mathbb{C}^*$، وبالتالي فإنّ f كمول على$C^+(0,1)$. إنّ:

$$\gamma(t)=e^{it}\,:\,0\le t\le 2\pi$$

هو تمثيل مسموح به لـ $C^+(0,1)$، وبالتالي فإنّ:

$$\int_{C^+(0,1)}\frac{1}{z}dz=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)dt=\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{it}}i\,e^{it}dt=[it]_0^{2\pi}=2\pi i$$

تمرين:

احسب التكامل $\int_\Gamma \bar{z}\,dz$، حيث Γ نصف دائرة الواحدة العلوي الممسوحة من 1 إلى -1.

الحل:

بداية إنّ ممثل المنحني Γ هو التابع $\gamma(t)=e^{it}\,:\,0\le t\le\pi$، من الواضح أنّ:

$$\gamma(0)=1,\gamma(\pi)=-1$$

وبالتالي فإنّ:

$$\int_\Gamma \bar{z}\,dz=\int_0^{\pi}\overline{\gamma(t)}\,\gamma'(t)dt=\int_0^{\pi}i\,e^{-it}e^{it}dt=\int_0^{\pi}i\,dt=[it]_0^{\pi}=\pi i$$

...انتهت المحاضرة الثانية عشر...